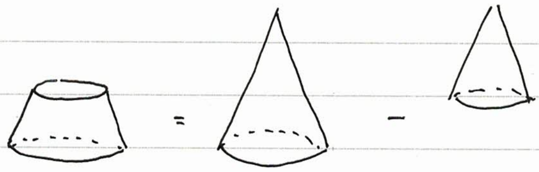
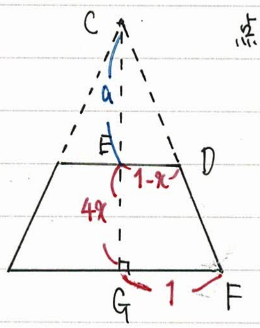
2000年　東大数学　文系　第1問

円錐台の体積の公式は知らないので.
大きい円錐から. 小さい円錐を切り取って計算



Aについて. 軸を含む断面を図示すると. 下のよう。



点C. D. E. F. G とし. CE=aとする。

△CED ∽ △CGF なので.

$a:(1-x)=(a+4x):1$

$a=(1-x)(a+4x)$

$a=a+4x-ax-4x^2$

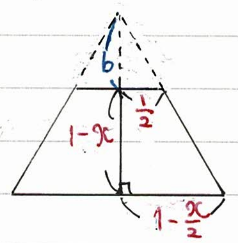
$ax=4x-4x^2$

$a=4-4x$　$(\because x>0)$

よって Aの体積 V_A は

$$V_A=\pi\times1^2\times(a+4x)\times\frac{1}{3}-\pi\times(1-x)^2\times a\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{4}{3}\pi-\frac{4\pi}{3}(1-x)^3$$
$$=\frac{4}{3}\pi\left\{1-(1-x)^3\right\}$$

同様に. Bについても.



$b:\frac{1}{2}=(1-x+b):\left(1-\frac{x}{2}\right)$

$b\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-x+b)$

$b-\frac{b}{2}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}b$

$b=1$

よって Bの体積 V_B は

$$V_B=\pi\times\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\times(1-x+b)\times\frac{1}{3}-\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times b\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{\pi}{12}\left\{(2-x)^3-1\right\}$$

$V(x)=V_A+V_B$ より

$$V(x)=\frac{4}{3}\pi\left\{1-(1-x)^3\right\}+\frac{\pi}{12}\left\{(2-x)^3-1\right\}$$

微分のし方① 展開してから

$V(x)=\cdots$　(頑張って展開)

$$=\frac{\pi}{12}\left(15x^3-42x^2+36x+7\right)$$

$$V'(x)=\frac{\pi}{12}\left(45x^2-84x+36\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(15x^2-28x+12\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}(5x-6)(3x-2)$$

微分のし方② 数IIIの合成関数の微分

$$V(x)=\frac{4}{3}\pi\left\{1-(1-x)^3\right\}+\frac{\pi}{12}\left\{(2-x)^3-1\right\}$$
微分

$$V'(x)=\frac{4}{3}\pi\left\{0-(-1)\cdot3(1-x)^2\right\}+\frac{\pi}{12}\left\{(-1)\cdot3(2-x)^2-0\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi\times3(1-x)^2+\frac{\pi}{12}\times(-3)(x-2)^2$$
$$=\frac{\pi}{12}\times3\left\{16(1-x)^2-(x-2)^2\right\}$$
頑張って展開
$$=\frac{\pi}{4}(5x-6)(3x-2)$$

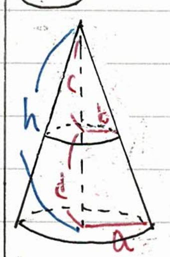
よって. $V(x)$ の $0\leqq x\leqq1$ の増減表は,

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$V\left(\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	

なので.

$V(x)$の最大値は $V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}+\frac{\pi}{12}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^3-1\right\}=\underline{\frac{151}{108}\pi}$ //

おまけ　実は. 円錐台の公式が作れる。



$c:b=h:a$ かつ $c+d=h$

この2式から. $c=\frac{bd}{a-b}$　$h=\frac{ad}{a-b}$

$$V=\frac{\pi a^2h}{3}-\frac{\pi b^2c}{3}$$
$$=\cdots=\frac{\pi}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)d$$